Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Manchmal soll irgendeine technische Größe optimiert werden. Hier kann mit Erfolg die Differentialrechnung eingesetzt werden.

Ein einfaches Beispiel: Ein Schäfer will mit 100m Maschendraht für einen Zaun ein rechteckiges Feld für seine Schafe begrenzen, so daß die Fläche darin möglichst groß wird. Anhand dieses Beispiels soll ein Verfahren zur Lösung dieses Problems aufgezeigt werden. Die Seitenlängen des Zaunes sind zu bestimmen.

Vorgehensweise:

Schritt 1:

Man stellt eine Funktionsgleichung auf, die als Ergebnis die zu optimierende Größe liefert. Dabei kommt meist zunächst mehr als eine Variable vor.

Schritt 2:

Man stellt eine Beziehung (Nebenbedingung) zwischen den Variablen auf und stellt diese nach einer Variablen um. Bei drei Variablen sind zwei Nebenbedingungen erforderlich, bei vier Variablen drei usw.

Schritt 3:

Die umgestellte Nebenbedingung(en) wird (werden) in die Funktionsgleichung (Hauptbedingung) eingesetzt. Man erhält eine Funktion von nur noch einer Variablen.

Schritt 4:

Die Funktion wird nach der verbliebenen Variablen abgeleitet und =0 gesetzt, um Kanditaten für einen Extremwert zu erhalten.

Schritt 5:

Mit Hilfe der 2. Ableitung (oder einem anderen Verfahren) wird geprüft, ob entsprechend der Aufgabenstellung ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Schritt 6:

Die restlichen gesuchten Größen werden bestimmt.

Beispiel:

Schritt 1:

Die zu optimierende Größe ist die Fläche A. Mit den beiden Variablen l und b für die Länge und Breite des Rechteckes ergibt sich:

$$A = l \cdot b$$

Schritt 2:

Bekannt ist der Umfang des Rechteckes, die Zaunlänge. Daraus ergibt sich:

$$2l + 2b = 100m$$
$$\Leftrightarrow \quad 2l = 100m - 2b$$
$$\Leftrightarrow \quad l = 50m - b$$

Schritt 3:

Einsetzen für l in Hauptbedingung ergibt:

$$A = (50m - b) \cdot b$$

Breite b

Die Fläche A als Funktion der ~~Länge l~~ lautet dann:

$$A(b) = (50m - b) \cdot b$$
$$\Leftrightarrow \quad A(b) = 50m \cdot b - b^2$$

Schritt 4:

$$A'(b)\ \cancel{\frac{dA}{db}} = 50m - 2b = 0$$

$$50m - 2b_E = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 50m = 2b_E$$
$$\Leftrightarrow \quad b_E = 25m$$

Schritt 5:

$$A''(b)\ \cancel{\frac{d^2A}{db^2}} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } b_E = 25m$$

Schritt 6:

Alle Seitenlängen des Rechteckes sind gesucht, die Länge l_E fehlt also noch. Ich verwende die entsprechende umgestellte Nebenbedingung:

$$l = 50m - b$$
$$l_E = 50m - 25m = 25m$$